Clamart, le 27 juin 2011

Restitution formelle
de la théorie sous-jacente
à la norme colorimétrique XYZ CIE 1931

Objet : Établissement des fonctions et de l'espace colorimétrique CIE 1931.

En 1931, la Commission Internationale de l'Éclairage a mis en place une norme colorimétrique qui a été le cadre de travail en vigueur pour tout le XX^e^ siècle et au-delà. Le présent document est la traduction légèrement commentée et corrigée de l'annexe A de la référence [1] tenant compte de l'erratum en référence [2]. Les commentaires sont indiqués par un fond coloré et une double barre en marge droite.

-°-

Les données publiées par Wright et Guild au début des années 1930 [3, 4, 5, 6] ont donné naissance à un ensemble de fonctions colorimétriques $\bar{r}(\lambda),\bar{g}(\lambda),\bar{b}(\lambda)$ dépendant de la longueur d'onde visible λ telles que la mise en correspondance chromatique d'un stimulus de spectre de puissance $S(\lambda)$ avec une superposition de primaires peut être décrite par trois coordonnées :

$$\begin{aligned} R(S)&=\int \bar{r}(\lambda).S(\lambda).d\lambda \\ G(S)&=\int \bar{g}(\lambda).S(\lambda).d\lambda \\ B(S)&=\int \bar{b}(\lambda).S(\lambda).d\lambda \end{aligned} \qquad (1).$$

Si deux lumières S1 et S2 produisent les mêmes valeurs R, G et B, alors elles se correspondent en couleur.

Les fonctions $\bar{r}(\lambda),\bar{g}(\lambda),\bar{b}(\lambda)$ furent tirées d'expériences de mises en correspondance colorimétrique avec des sources de lumière primaires quasi monochromatiques.

Diverses longueurs d'onde furent utilisées mais grâce aux conversions effectuées par la CIE, il est possible de considérer que...

les longueurs d'onde des sources de lumière primaires utilisées pour ces expériences furent $\lambda_r=700\,nm\,,\lambda_g=546{,}1\,nm\,,\lambda_b=435{,}8\,nm$.

Aux erreurs expérimentales près, une source primaire doit correspondre avec elle-même donc les expériences de mise en correspondance tendent à donner : $\bar{r}(\lambda_r)=\bar{g}(\lambda_g)=\bar{b}(\lambda_b)=1$.

En fait, en notant a pour r ou g ou b, si S_a est la puissance (en watt) émise par une source primaire monochromatique, son spectre est un Dirac à sa longueur d'onde : $S(\lambda)=S_a.\delta_{(\lambda_a)}$ et les trois coordonnées chromatiques données par la formule (1) sont donc :

$$\begin{aligned} R_a&=S_a.\bar{r}(\lambda_a) \\ G_a&=S_a.\bar{g}(\lambda_a) \\ B_a&=S_a.\bar{b}(\lambda_a) \end{aligned} \quad .$$

Deux de ces coordonnées sont nécessairement nulles et l'affirmation selon laquelle $\bar{r}(\lambda_r)=\bar{g}(\lambda_g)=\bar{b}(\lambda_b)=1$ signifierait implicitement que la troisième coordonnée chromatique est égale à la puissance émise : $R_r=S_r$, $G_g=S_g$ ou $B_b=S_b$ (grandeur physique dimensionnelle).

Sellig Zed – Auteur - photographe
Mél : sz.ap (AD) laposte.net - Site : http://sellig.zed.myriapyle.net/

Toutefois, la CIE a raisonné différemment et a normalisé les trois fonctions colorimétriques pour leur donner la même intégrale valant un certain ratio K de l'intégrale de la fonction d'efficacité lumineuse $V(\lambda)$ traduisant la sensibilité de l'œil et définie par la CIE en 1924 :

$$\begin{aligned} \int \bar{r}(\lambda).d\lambda = \int \bar{g}(\lambda).d\lambda = \int \bar{b}(\lambda).d\lambda \\ ... = K. \int V(\lambda).d\lambda \end{aligned} \quad (2).$$

Le coefficient K sera choisi ultérieurement par commodité.

Une lumière blanche de spectre iso-énergétique constant $S(\lambda) = S_{BIE}$ a ainsi pour coordonnées chromatiques :

$$R_{BIE} = \int \bar{r}(\lambda).S_{BIE}.d\lambda = S_{BIE} K \int V(\lambda).d\lambda = K \int S_{BIE} V(\lambda).d\lambda = (683 \frac{lm}{W}).K.F_{(lm)}$$

$$G_{BIE} = \int \bar{g}(\lambda).S_{BIE}.d\lambda = S_{BIE} K \int V(\lambda).d\lambda = K \int S_{BIE} V(\lambda).d\lambda = (683 \frac{lm}{W}).K.F_{(lm)}$$

$$B_{BIE} = \int \bar{b}(\lambda).S_{BIE}.d\lambda = S_{BIE} K \int V(\lambda).d\lambda = K \int S_{BIE} V(\lambda).d\lambda = (683 \frac{lm}{W}).K.F_{(lm)}$$

D'abord, ces trois coordonnées sont égales. Ensuite, par définition de l'efficacité visuelle, elles expriment le flux lumineux mesuré en lumen (à la constante multiplicative K.683 lm/W près).

Il est à noter que la normalisation indiquée par les égalités (2) n'affecte pas les propriétés de mise en concordance des couleurs de deux lumières.

A partir de là, la CIE souhaitait une nouvelle représentation de l'espace colorimétrique simplifiant les calculs, indépendante des choix de sources primaires expérimentales et incorporant la fonction d'efficacité lumineuse.

Son problème formel était de définir une transformation linéaire du système (R,G,B) vers un nouveau système (X,Y,Z), le changement de coordonnées chromatiques étant alors effectué par le produit matriciel :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad (3, a)$$

où T est une matrice 3x3 à déterminer.

En remplaçant R, G et B par leurs expressions intégrales (1) pour un stimulus de spectre donné, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \int \bar{r}(\lambda).S(\lambda).d\lambda \\ \int \bar{g}(\lambda).S(\lambda).d\lambda \\ \int \bar{b}(\lambda).S(\lambda).d\lambda \end{bmatrix} = \int T \begin{bmatrix} \bar{r}(\lambda) \\ \bar{g}(\lambda) \\ \bar{b}(\lambda) \end{bmatrix}.S(\lambda).d\lambda \quad .$$

Il suffit donc de poser :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(\lambda) \\ \bar{y}(\lambda) \\ \bar{z}(\lambda) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \bar{r}(\lambda) \\ \bar{g}(\lambda) \\ \bar{b}(\lambda) \end{bmatrix} \quad (3, b)$$

pour disposer, par la même opération matricielle, de trois nouvelles fonctions colorimétriques incorporant toutes les propriétés de mise en concordance chromatique des données Wright-Guild et fournissant les nouvelles coordonnées chromatiques par intégration spectrale.

La matrice T est caractérisée par ses neuf coefficients : $T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ (4).

Pour la trouver, il est plus simple de rechercher sa matrice inverse :

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (5).$$

En effet, les coefficients a_{ij} sont les composantes dans RGB des vecteurs unitaires du nouveau système (X, Y, Z) :

$$\begin{bmatrix} R_X \\ G_X \\ B_X \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} R_Y \\ G_Y \\ B_Y \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} R_Z \\ G_Z \\ B_Z \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \qquad (6).$$

Trois premières contraintes découlent d'une normalisation des fonctions colorimétriques similaire à celle effectuée pour le système RGB, en imposant l'égalité de leurs intégrales.

Dans le cas présent, comme la CIE fait le choix d'imposer que la fonction $\overline{y}(\lambda)$ soit par construction identique à l'efficacité lumineuse, les trois intégrales doivent alors être exactement égales à celle de $V(\lambda)$:

$$\int \overline{x}(\lambda).d\lambda = \int \overline{y}(\lambda).d\lambda = \int \overline{z}(\lambda).d\lambda \\ ... = \int V(\lambda).d\lambda \qquad (7).$$

A partir de l'équation (5), en y remplaçant les coordonnées par les fonctions colorimétriques, en intégrant puis en divisant par le facteur commun $\int V(\lambda).d\lambda$, on obtient les trois équations suivantes pour les a_{ij} :

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{12}+a_{13} &= K \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} &= K \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} &= K \end{aligned} \qquad (8).$$

Pour déterminer les neuf inconnues, il reste 6 équations à imposer. Elles vont découler du choix du triangle chromatique, c'est-à-dire du triangle encadrant au mieux le lieu du spectre visible selon les principes de la CIE.

Comme on l'a vu plus haut, les coordonnées chromatiques R, G et B (variables dimensionnelles) contiennent à la fois une information sur le flux lumineux (mesuré en lumen) et une information de couleur, appelée la chrominance, et caractérisée uniquement et entièrement par leurs valeurs relatives.

De ce fait, si l'on s'intéresse uniquement à la chrominance, il est possible de n'utiliser que les coordonnées dites réduites, normalisées de sorte que leur somme égale l'unité :

$$r = \frac{R}{R+G+B}, g = \frac{G}{R+G+B}, b = \frac{B}{R+G+B} \qquad (9).$$

Dans l'espace RGB, le point de coordonnées (r,g,b) est la projection centrale du point (R,G,B) sur le plan d'équation R+G+B=1.

Puisque la troisième coordonnée réduite se déduit des deux autres par $b=1-r-g$, la chrominance est entièrement caractérisée par les deux nombres (r, g) , c'est-à-dire par la position de la projection, parallèlement à l'axe B, dans le plan RG, du point (r, g, b) . La CIE raisonnait dans cet espace chromatique bidimensionnel dont les coordonnées sont les deux premières de (9) :

$$r = \frac{R}{R+G+B}, g = \frac{G}{R+G+B} \qquad (10).$$

Dans ce plan, elle a choisi selon ses exigences *a priori*, un triangle encadrant au mieux le lieu chromatique du spectre visible. Notons $(r_X, g_X, 0)$, $(r_Y, g_Y, 0)$ et $(r_Z, g_Z, 0)$ les trois sommets de ce triangle. Comme ce triangle doit servir à construire les trois vecteurs unitaires X, Y et Z du nouveau système XYZ, les égalités (6) impliquent :

$$\begin{aligned} r_X &= \frac{R_X}{R_X+G_X+B_X} = \frac{a_{11}}{a_{11}+a_{21}+a_{31}}, g_X = \frac{G_X}{R_X+G_X+B_X} = \frac{a_{21}}{a_{11}+a_{21}+a_{31}} \\ r_Y &= \frac{R_Y}{R_Y+G_Y+B_Y} = \frac{a_{12}}{a_{12}+a_{22}+a_{32}}, g_Y = \frac{G_Y}{R_Y+G_Y+B_Y} = \frac{a_{22}}{a_{12}+a_{22}+a_{32}} \\ r_Z &= \frac{R_Z}{R_Z+G_Z+B_Z} = \frac{a_{13}}{a_{13}+a_{23}+a_{33}}, g_Z = \frac{G_Z}{R_Z+G_Z+B_Z} = \frac{a_{23}}{a_{13}+a_{23}+a_{33}} \end{aligned} \qquad (11).$$

Une fois que les r et g des trois sommets sont connues, ces égalités fournissent en fait 6 nouvelles équations linéaires pour les inconnues a_{ij} .

Au total, le système linéaire de neuf équations qui a été résolu par la CIE est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ r_X-1 & 0 & 0 & r_X & 0 & 0 & r_X & 0 & 0 \\ g_X & 0 & 0 & g_X-1 & 0 & 0 & g_X & 0 & 0 \\ 0 & r_Y-1 & 0 & 0 & r_Y & 0 & 0 & r_Y & 0 \\ 0 & g_Y & 0 & 0 & g_Y-1 & 0 & 0 & g_Y & 0 \\ 0 & 0 & r_Z-1 & 0 & 0 & r_Z & 0 & 0 & r_Z \\ 0 & 0 & g_Z & 0 & 0 & g_Z-1 & 0 & 0 & g_Z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Pour terminer le calcul, il ne reste plus qu'à exprimer les coordonnées des trois sommets et à fixer K.

A cet égard, l'exigence de la CIE d'identifier la nouvelle seconde fonction colorimétrique à l'efficacité lumineuse implique plusieurs conditions.

D'abord, la normalisation des fonctions $\bar{r}(\lambda), \bar{g}(\lambda), \bar{b}(\lambda)$ par les égalités (2) les a fixées entre elles mais les a laissées « flottantes » dans l'absolu tant que K n'est pas déterminée. Cependant, le choix de la primaire rouge avec une longueur d'onde dans les rouges lointains garantit que, à cette longueur d'onde, les fonctions colorimétriques verte et bleue sont nulles, $\bar{g}(\lambda_r)=\bar{b}(\lambda_r)=0$, et donc toute la luminance est portée par la première fonction colorimétrique. Dès lors, on doit avoir : $V(\lambda_r)=\bar{r}(\lambda_r)$.

La connaissance des intégrales de ces deux fonctions permet alors de calculer $K=0{,}1770$.

L'ajustement aux moindres carrés d'une combinaison de $\bar{r}(\lambda), \bar{g}(\lambda), \bar{b}(\lambda)$ proportionnelle à l'efficacité lumineuse et prenant en compte cette condition a permis à la CIE de montrer que, avec une précision satisfaisante :

$$V(\lambda)=1.\bar{r}(\lambda)+4{,}5907.\bar{g}(\lambda)+0{,}0601.\bar{b}(\lambda)$$

ce qui revient à écrire, par construction :

$$\bar{y}(\lambda)=1.\bar{r}(\lambda)+4{,}5907.\bar{g}(\lambda)+0{,}0601.\bar{b}(\lambda) .$$

En rapprochant cette égalité des (3) et (4), on voit qu'elle détermine 3 des coefficients de la matrice T : $b_{21}=1, b_{22}=4{,}5907, b_{23}=0{,}0601$.

Pour identifier $\bar{y}(\lambda)$ et $V(\lambda)$, la CIE place les sommets X et Z sur le plan dit « alychne » par Schrödinger, c'est-à-dire le plan de luminance nulle, afin que toute la luminance soit portée par la deuxième coordonnée. Ce plan a pour équation Y=0, c'est-à-dire en coordonnées réduites, y=0, et en tenant compte de la transformation de coordonnées :

$$b_{21}.r+b_{22}.g+b_{23}.b=0 .$$

Par projection dans l'espace colorimétrique bidimensionnel standard de la CIE, avec $b=1-r-g$, on obtient l'équation d'une droite alychne :

$$b_{21}.r+b_{22}.g+b_{23}.(1-r-g)=(b_{21}-b_{23}).r+(b_{22}-b_{23}).g+b_{23}=0 \qquad (12).$$

Les deux sommets X et Z du triangle doivent donc respecter les contraintes :

$$\begin{matrix} (b_{23}-b_{21}).r_X+(b_{23}-b_{22}).g_X=b_{23} \\ (b_{23}-b_{21}).r_Z+(b_{23}-b_{22}).g_Z=b_{23} \end{matrix} \qquad (13).$$

Les autres conditions sur les sommets du triangle découlent de considérations purement géométriques, par le choix de côtés encadrant le lieu des couleurs visibles de manière qu'il soit entièrement contenu dans le triangle, sans « perdre de place » et en s'arrangeant pour simplifier les calculs.

Le corps principal de l'article décrit ces considérations. Toutefois, l'équation (14) de l'article comporte une erreur de signe (son second membre ne devrait pas commencer par un signe -). Dans la suite, la correction de cette erreur est prise en compte.

Les deux autres cotés du triangle choisis par la CIE ont pour équations :

- pour la ligne de XY : $100r+99g=100$,
- pour la ligne de YZ : $2{,}6268r+0{,}9970g=-1{,}8113$.

Les sommets du triangle doivent donc vérifier :

$$\begin{aligned} 100\,r_X + 99\,g_X &= 100 \\ 100\,r_Y + 99\,g_Y &= 100 \end{aligned} \qquad (14)$$

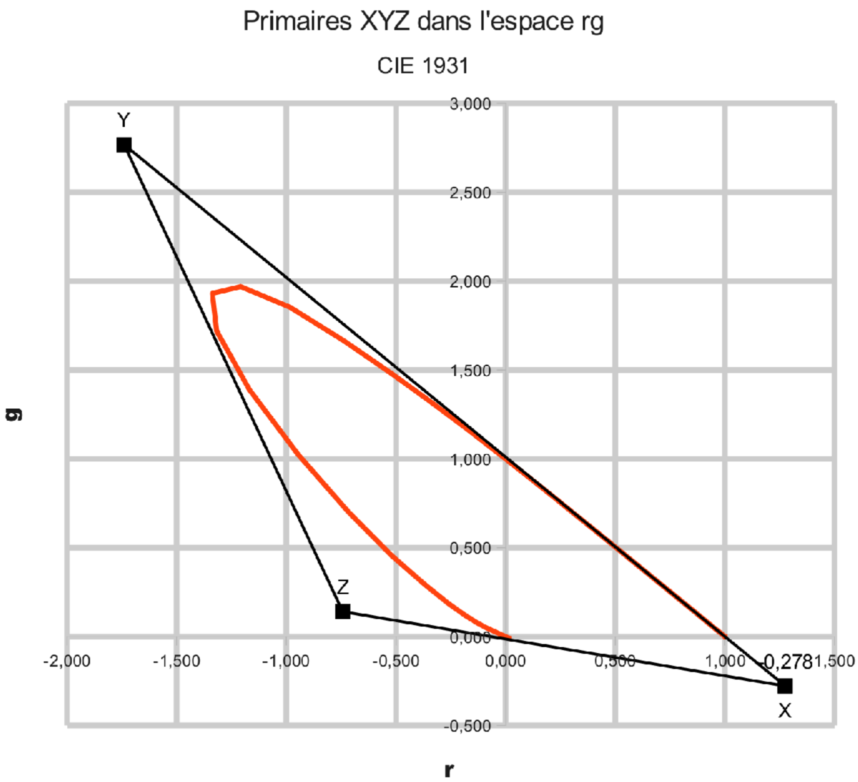
et

$$\begin{aligned} 2{,}6268\,r_Y + 0{,}9970\,g_Y &= -1{,}8113 \\ 2{,}6268\,r_Z + 0{,}9970\,g_Z &= -1{,}8113 \end{aligned} \qquad (15).$$

Les égalités (13), (14) et (15) forment un système de six équations linéaires pour les six coordonnées inconnues des sommets des triangles. Tous calculs faits, les sommets ont les coordonnées suivantes dans l'espace (r,g) :

Sommets	r	g
X	1,275	-0,278
Y	-1,740	2,768
Z	-0,743	0,141

Dans le même espace, le bord du lieu du spectre visible est la courbe représentative des sources monochromatiques dont les coordonnées chromatiques réduites sont $\frac{\bar{r}(\lambda)}{\bar{r}(\lambda)+\bar{g}(\lambda)+\bar{b}(\lambda)}$, $\frac{\bar{g}(\lambda)}{\bar{r}(\lambda)+\bar{g}(\lambda)+\bar{b}(\lambda)}$ et $\frac{\bar{b}(\lambda)}{\bar{r}(\lambda)+\bar{g}(\lambda)+\bar{b}(\lambda)}$. Les deux premières sont les équations du bord dans l'espace colorimétrique bidimensionnel (r,g) de la CIE. La figure suivante représente ce bord superposé au triangle chromatique XYZ donné ci-avant.



Une fois ce résultat connu, la résolution du système de 9 équations pour les coefficients a_{ij} fournit la matrice T^{-1} puis par inversion la matrice T cherchée.

Cependant, l'erratum en référence (2) n'a pas tiré toutes les conséquences pour les coefficients matriciels de l'introduction du facteur K. En effet, remplacer 1 par K au second membre du système linéaire pour les inconnues a_{ij} a pour effet de multiplier toutes ces valeurs par K et donc à diviser tous les b_{ij} par 1/K. La résolution effective du système corrigé en tenant compte du facteur K introduit par l'erratum conduit en réalité au résultat suivant.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}41857 & -0{,}15873 & -0{,}08283 \\ -0{,}09119 & 0{,}25248 & 0{,}01571 \\ 0{,}00091 & -0{,}00252 & 0{,}17861 \end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2{,}76825 & 1{,}75167 & 1{,}12979 \\ 0{,}99981 & 4{,}58982 & 0{,}06009 \\ 0{,}00000 & 0{,}05594 & 5{,}59378 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, par choix de construction, les coefficients de la deuxième ligne doivent être identiques aux coefficients d'ajustement : $b_{21}=1, b_{22}=4{,}5907, b_{23}=0{,}0601$, les autres coefficients n'étant pas connus avec une aussi bonne précision. La matrice qui devrait être affichée devrait donc plutôt être la suivante :

$$T=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2{,}768 & 1{,}752 & 1{,}130 \\ 1 & 4{,}5907 & 0{,}0601 \\ 0{,}000 & 0{,}056 & 5{,}594 \end{bmatrix}.$$

Cependant, chaque ligne de cette matrice a pour somme de ses coefficients la valeur 5,65 (avec cette précision) et multiplier tous les coefficients de la matrice par un même nombre dilate l'espace d'arrivée mais n'a pas d'effet sur les coordonnées réduites tridimensionnelles ni, *a fortiori*, sur les coordonnées de l'espace chromatique bidimensionnel (r,g) de la CIE.

Ainsi, la CIE a finalement retenu la matrice normalisée pour que les coefficients d'une même ligne aient leur somme égale à l'unité :

$$T=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}49 & 0{,}31 & 0{,}20 \\ 0{,}17697 & 0{,}81240 & 0{,}01064 \\ 0{,}00 & 0{,}01 & 0{,}99 \end{bmatrix}$$

Il est à noter que, volontairement, la seconde ligne est donnée avec une grande précision (découlant de l'ajustement aux moindres carrés d'une combinaison de fonctions colorimétriques à l'efficacité lumineuse) tandis que les autres coefficients, obtenus par une approche géométrique moins précise sont arrondis à deux chiffres significatifs. Ceci n'a pas empêché de voir la littérature subséquente rapidement reproduire cette matrice avec tous les coefficients dotés de cinq chiffres après la virgule, en complétant par des zéros finals.

O_O
\°|°/
=.=

Références

[1] Fairman H. S., Brill M. H., Hemmendinger H. « How the CIE 1931 Color-Matching Functions Were Derived from Wright-Guid Data », Color Res. Appl. 22, 1, 11-23 (1997).

[2] Brill M. H., « Erratum - How the CIE 1931 Color-Matching Functions Were Derived from Wright-Guid Data », Color Res. Appl. 23, 4, 259 (1998).

[3] Wright W. D., « A re-determination of the trichromatic coefficients of the spectral colours », Trans. Opt. Soc. London 30, 141– 164 (1928–29).

[4] Wright W. D., « A re-determination of the mixture curves of the spectrum », Trans. Opt. Soc. London 31, 201–211 (1929–30).

[5] Guild J., « The colorimetric properties of the spectrum », Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 230, 149–187 (1931).

[6] Smith T., Guild J., « The CIE colorimetric standards and their use », Trans. Opt. Soc. London 33, 18–134 (1932).