Représentation 3D d'un graphe (x,y,z)

Le but est de faire une représentation 3D projetée sur un plan 2D d'une courbe connue par son graphe (x,y,z).

Repères

Le trièdre Oxyz a des vecteurs unitaires $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$.

La direction de l'axe Oz' du regard, perpendiculaire à l'écran de présentation et orienté vers le spectateur, est donnée par le vecteur unitaire $\underline{r}$ (α,β,γ) avec $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Les axes du plan de représentation (plan normal à $\underline{r}$ passant par O) sont Ox' (horizontal) et Oy' (vertical). Ils ont pour vecteurs unitaires $\underline{h}$ et $\underline{v}$.

Par convention, pour que Oz paraisse vertical vers le haut et incliné vers le spectateur, l'axe Oz est dans le plan Oy'z' et dans le demi-plan supérieur de ce plan donc :

- d'une part, $\underline{k}.\underline{h} = h_z = 0$, d'ou $\underline{h} = h_x\,\underline{i} + h_y\,\underline{j}$;
- d'autre part, $\underline{k}.\underline{r} > 0$ d'où r_z (= γ) >0 .

L'utilisateur choisit α et β. On a d'abord $\gamma=[1-(\alpha^2+\beta^2)]^{1/2}$ (positif en raison de l'inégalité en deuxième part précédente).

Ensuite, $\underline{h}$ étant perpendiculaire à $\underline{r}$, d'après l'égalité en première part,

$\alpha\, h_x + \beta\, h_y = 0$ d'où $h_y = -(\alpha/\beta)\, h_x$

et, $\underline{h}$ étant unitaire, $h_x^2 + [-(\alpha/\beta)\, h_x]^2 = 1$ d'où $h_x^2 = 1/[1+(\alpha/\beta)^2]$

et cette équation a pour solution :

$h_x = \varepsilon\{1/[1+(\alpha/\beta)^2]\}^{1/2}$, ou $\varepsilon = +1$ ou -1 reste à déterminer.

Ainsi, $\underline{h}$ est complètement déterminé par ses composantes dans Oxyz :

$(\varepsilon\{1/[1+(\alpha/\beta)^2]\}^{1/2} , -(\alpha/\beta)\, \varepsilon\, \{1/[1+(\alpha/\beta)^2]\}^{1/2} , 0)$.

Comme $\underline{v} = \underline{r} \wedge \underline{h}$:

$v_x = r_y\, h_z - h_y\, r_z = (\alpha/\beta)\, \varepsilon\, \{1/[1+(\alpha/\beta)^2]\}^{1/2}\, [1-(\alpha^2+\beta^2)]^{1/2} = \alpha\, \varepsilon\, \{[1-(\alpha^2+\beta^2)]/[\beta^2+\alpha^2]\}^{1/2}$

$v_y = r_z\, h_x - r_x\, h_z = [1-(\alpha^2+\beta^2)]^{1/2}\, \varepsilon\, \{1/[1+(\alpha/\beta)^2]\}^{1/2} = \beta\, \varepsilon\, \{[1-(\alpha^2+\beta^2)]/[\beta^2+\alpha^2]\}^{1/2}$

$v_z = r_x\, h_y - h_x\, r_y = -\varepsilon\, \alpha^2 /[\beta^2+\alpha^2]^{1/2} - \varepsilon\, \beta^2 /[\beta^2+\alpha^2]^{1/2} = -\, \varepsilon\, [\beta^2+\alpha^2]^{1/2}$

On vérifie que la somme des carrés de ces trois composantes vaut bien 1.

Point courant

Le point courant M(x,y,z) de la courbe est connu par le vecteur

$\underline{OM} = x\, \underline{i} + y\, \underline{j} + z\, \underline{k} = x'\, \underline{h} + y'\, \underline{v} + z'\, \underline{r}$.

La représentation 2D voulue est donnée par le graphe (x',y'). Il s'agit donc de calculer ces quantités :

$\underline{OM}.\underline{h} = x' = x\, \underline{i}.\underline{h} + y\, \underline{j}.\underline{h} + z\, \underline{k}.\underline{h} = x\, h_x + y\, h_y + z\, h_z$

soit $x' = x\, \varepsilon\{1/[1+(\alpha/\beta)^2]\}^{1/2} - y\, (\alpha/\beta)\, \varepsilon\{1/[1+(\alpha/\beta)^2]\}^{1/2} = \varepsilon(\beta\, x - \alpha\, y) /[\beta^2+\alpha^2]^{1/2}$

$\underline{OM}.\underline{v} = y' = x\, \underline{i}.\underline{v} + y\, \underline{j}.\underline{v} + z\, \underline{k}.\underline{v} = x\, v_x + y\, v_y + z\, v_z$

soit $y' = \varepsilon(\alpha\, x + \beta\, y)\, \{[1-(\alpha^2+\beta^2)]/[\beta^2+\alpha^2]\}^{1/2} - z\, \varepsilon\, [\beta^2+\alpha^2]^{1/2}$.

$\underline{OM}.\underline{r} = z' = x\, \underline{i}.\underline{r} + y\, \underline{j}.\underline{r} + z\, \underline{k}.\underline{r} = x\, r_x + y\, r_y + z\, r_z = \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z$.

Et l'on choisit $\varepsilon = -1$ pour que y' soit croissant avec z (« vers le haut »).

Finalement

$x' = -(\beta x - \alpha y) /[\beta^2+\alpha^2]^{1/2}$,

$y' = - (\alpha x + \beta y) \{[1-(\alpha^2+\beta^2)]/[\beta^2+\alpha^2]\}^{1/2} + z [\beta^2+\alpha^2]^{1/2}$,

$z' = \alpha x + \beta y + \gamma z$.

Axes du trièdre

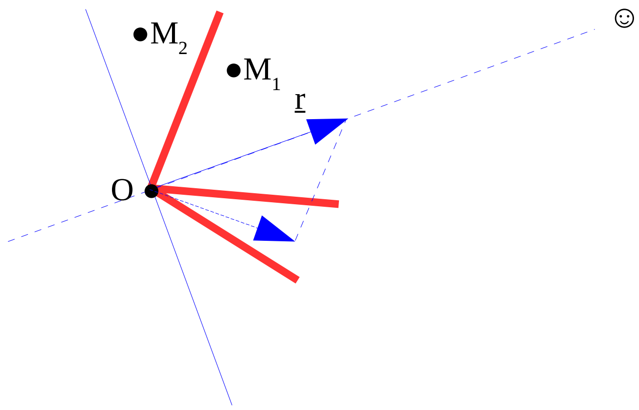
Les axes du trièdre peuvent être figurés à l'aide des extrémités de leurs vecteurs unitaires :

$\underline{i}$: $(1,0,0) \longrightarrow x' = - \beta /[\beta^2+\alpha^2]^{1/2}$, $y' = - \alpha \{[1-(\alpha^2+\beta^2)]/[\beta^2+\alpha^2]\}^{1/2}$;

$\underline{j}$: $(0,1,0) \longrightarrow x' = \alpha /[\beta^2+\alpha^2]^{1/2}$, $y' = - \beta \{[1-(\alpha^2+\beta^2)]/[\beta^2+\alpha^2]\}^{1/2}$;

$\underline{k}$: $(0,0,1) \longrightarrow x' = 0$; $y' = [\beta^2+\alpha^2]^{1/2}$.

Gestion des tracés cachés par les axes



Un point M est caché par un axe si et seulement si le produit scalaire de $\underline{OM}$ avec la projection de $\underline{r}$ sur le plan formé par les deux autres axes est négatif :

M caché par Oz $\Leftrightarrow$ OM.($\alpha \underline{i} + \beta \underline{j}$) <0 $\Leftrightarrow \alpha x + \beta y < 0$,

M caché par Oy $\Leftrightarrow$ OM.($\alpha \underline{i} + \gamma \underline{k}$) <0 $\Leftrightarrow \alpha x + \gamma z < 0$,

M caché par Ox $\Leftrightarrow$ OM.($\beta \underline{j} + \gamma \underline{k}$) <0 $\Leftrightarrow \beta y + \gamma z < 0$.

Pour représenter ce phénomène, il suffit de tracer les axes sur un calque dit « avant » et de prévoir dessous un deuxième calque « arrière ». Le point courant est tracé sur le calque arrière si l'un des critères est négatif, sur le calque avant dans le cas contraire.